Физико-математические науки

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[5]

Р.М. Кумышев, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия)
e-mail:kumyshev1974@mail.ru

Аннотация. Исследованы краевые задачи для уравнения второго порядка с отклонением аргумента по обеим переменным. Вопрос разрешимости при определенных условиях редуцирован к исследованию двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, отклоняющийся аргумент.

На современном этапе у многих математиков вызывают модели, основанные на дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом. К этим моделям приводят многие задачи нейро программирования, переноса массы и энергиии, передачи информациии. Несомненно, что данная теория только развивается. В данной работе рассматривается рассматривается уравнение, которое уже изучено некоторыми математиками, но данная постановка задач приводится впервые.

Для уравнения $L_p u(x,y) + \varepsilon L_q u(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = 0,$ (1)

где $L_\lambda \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - линейный дифференциальный оператор, $0 < \varepsilon < 1$, p и q - действительные константы, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1-p}{\varepsilon} < q < 1 - \dfrac{1-p}{\varepsilon}, \\ -1 - \dfrac{1+p}{\varepsilon} < q < -1 + \dfrac{1+p}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{2}$$

$\alpha(x,y) = y = x + \sigma_1(x,y),\ \beta(x,y) = x = y + \sigma_2(x,y)$ - инволютивные отклонения [1], обладающие свойствами: отклонения $\sigma_1(x,y)$ и $\sigma_2(x,y)$ имеют разные знаки $\sigma_1 = -\sigma_2 = y - x.$.

Нетрудно показать, что относительно функций

$$v(x,y) = \frac{u(x,y) + u(y,x)}{2} \quad \text{и} \quad w(x,y) = \frac{u(x,y) - u(y,x)}{2}$$

уравнение (1) распадается на два дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка:

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)v_{xx} + 2(p + q\varepsilon)v_{xy} + (1+\varepsilon)v_{yy} = 0, \\ (1-\varepsilon)w_{xx} + 2(p - q\varepsilon)w_{xy} + (1-\varepsilon)w_{yy} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

[5] Статья представлена техническим редактором журнала «Наука. Мысль», магистром социальной работы Т.М. Хусяиновым (Нижний Новгород, Россия). Рецензент: к.ф.-м.н., с.н.с. отдела математического моделирования геофизических процессов ФГБНУ ИПМА Т.С. Кумыков (Нальчик, Россия)

В силу ограничений (2), наложенных на p и q, данная система будет являться строго гиперболической.

Очевидно, что уравнение (1) при $\varepsilon \neq 0$ не поддается известной классификации дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Для этого уравнения не определено понятие характеристики, но каждое уравнение системы (3) имеет два семейства характеристик, геометрия которых существенно зависит от параметра ε.

Прямые

AB: $y = \alpha x + c,$ BC: $y = \dfrac{1}{\alpha} x + c,$

AE: $y = \beta x + c,$ CE: $y = \dfrac{1}{\beta} x + c,$, где

$$\alpha = \frac{p+q\varepsilon}{1+\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p+q\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 1}, \quad \beta = \frac{p-q\varepsilon}{1-\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p-q\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 - 1},$$

будем называть квазихарактеристиками уравнения (1) соответственно первого и второго рода.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) является дифференциальным уравнением 2-го порядка, а квазихарактеристики первого и второго рода сливаются в семейство характеристик этого уравнения.

В силу свойств инволютивных отклонений, область, в которой ищется решение, должна обладать симметрией относительно прямой $y = x$.

В области $D = \{(x, y) : y + x > 0\}$ для уравнения (1) рассмотрены краевые задачи с условиями:

Задача 1:

$$a_1 u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + b_1 u(\frac{1+x}{2}, -\frac{-x-1}{2}) = \omega_1(x), \quad (4)$$

$$a_2 \frac{d}{dx} u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + b_2 \frac{d}{dx} u(\frac{1+x}{2}, -\frac{-x-1}{2}) = \omega_2(x), \quad (5)$$

Задача 2:

$$a_3 u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + b_3 \frac{d}{dx} u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) = \omega_3(x), \quad (6)$$

$$a_4 u(\frac{1+x}{2}, -\frac{-x-1}{2}) + b_4 \frac{d}{dx} u(\frac{1+x}{2}, -\frac{-x-1}{2}) = \omega_4(x), \quad (7)$$

Задача 3:

$$a_5 u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + b_5 \frac{d}{dx} u(\frac{x+1}{2}, \frac{-x-1}{2}) = \omega_5(x), \quad (8)$$

$$a_6 u(\frac{1+x}{2}, -\frac{-x-1}{2}) + a_7 \frac{d}{dx} u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) = \omega_6(x), \quad (9)$$

Задача 4:

$$a_8 \frac{d}{dx} u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + a_9 \frac{d}{dx} u(\frac{x+1}{2}, \frac{-x-1}{2}) = \omega_7(x), \quad (10)$$

$$a_{10} u(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + a_{11} \frac{d}{dx} u(\frac{x+1}{2}, \frac{-x-1}{2}) = \omega_8(x), \quad (11)$$

где $a_i, b_i - const \quad \omega_i(x) \in c^2(D)$

Используя свойства четности и нечетности функций *v(x,y)* и *w(x, y)* соответственно относительно прямой *y* = *x*, нетрудно получить общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = f(y-\alpha x) + f(x-\alpha y) + g(y-\beta x) - g(x-\beta y),$$

где функции $f(x), g(x) \in C^2(D)$.

Определяя *f* и *g* таким образом, чтобы удовлетворялись заданные условия можно получить решения данных краевых задач.

Литература:

1. Андреев А.А. О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлсмановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения. Труды второго международного семинара. Самара, 1998. С. 5-18.

2. Кумышев Р.М., Битова А.А. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка с отклоняющимся аргументом // Приволжский научный вестник. 2015. № 5-1 (45). С. 9-12.

3. Сабанчиева А.А., Кумышев Р.М., Сурамова Ж.Х. О разрешимости нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности // В сборнике: инновационное развитие современной науки сборник статей международной научно-практической конференции. Ответственный редактор: Сукиасян А.А.. 2015. С. 11-14.

4. Кумышев Р.М. О разрешимости краевой задачи для нагруженного смешанно-параболического уравнения // Российская наука в современном мире Сборник статей международной научно-практической конференции. Ответственный редактор: Соловьев В.Б.. 2015. С. 197-200.

Kumyshev R.M. O razreshimosti kraevyh zadach so smeshheniem dlja differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom // Nauka. Mysl'. - № 1-2. – 2016.

— • —

Abstract. The boundary value problems have been studied for the second order equation with deflecting arguments on both variables. The question on solvability has been reduced to the investigation of two differential second order differential equations.

Keywords: differential equation in partial derivatives, deflecting argument.

.— • —

Сведения об авторе

Радион Музаринович **Кумышев** - старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова (Нальчик, Россия).

– • –

Подписано в печать 30.01.2016.